QCM :

1) $\vec{u}.\vec{v}=-2$
2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC)
3) $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|$
4) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$
   b) $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{EG}=\vec{0}$
   c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FH}=0$
   d) V=$\frac{1}{6}$

Vrai-Faux :

1) (vrai)

en effet : la droite (AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc elle est perpendiculaire à ce plan

2) (faux)

si$\vec{u}$ et$\vec{v}$ *nesont pas coliéaires alors* $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base

3) a) (vrai)

$\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{v}$ or $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{v}$ d'où $\vec{v}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$

b) (faux)

contre exemple : si par exemple $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ et $\vec{w}$

c) (faux)

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\wedge\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}(\vec{v}-\vec{w})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont colinéaires

ou bien : (voir QCM)

4) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ mais $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AD}$

EX1 :

dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

A(0,0,0) ; F(1,0,1) ; H(0,1,1) ; E(0,0,1) ; B(1,0,0) ; C (1,1,0) et G(1,1,1)

* $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH} = -1+1+0 = 0$

* $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HC} = 1+0-1 = 0$

* $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GB} = 0-1+0 = -1$

* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} = 1+0+0 = 1$

EX2 :

1) * $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AD}\right\|.\cos B\hat{A}D = 1\times 1\times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

   - de même $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ d'où les droites (AB) et (CD) sont orthogonales
   - de même on pourra montrer que (AC) et (BD) sont orthogonales
   - aussi pour les droites (AD) et (BC)

EX3 :

a) * $(\vec{j}+\vec{k}).(\vec{k}-\vec{j})=\left\|\vec{k}\right\|^2-\left\|\vec{j}\right\|^2=1-1=0$ d'où $(\vec{j}+\vec{k})\perp(\vec{k}-\vec{j})$

- $(\vec{j}+\vec{k}).\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}+\vec{k}.\vec{i}=0+0=0$ d'où $(\vec{j}+\vec{k})\perp\vec{i}$
- $(\vec{k}-\vec{j}).\vec{i}=\vec{k}.\vec{i}-\vec{j}.\vec{i}=0-0=0$ d'où $\vec{i}\perp(\vec{k}-\vec{j})$

d'où le repère $(O,\vec{j}+\vec{k},\vec{k}-\vec{j},\vec{i})$ est orthogonal

b) $(\vec{i}-\vec{j}).(\vec{j}-\vec{k})=\vec{i}.\vec{j}-\vec{i}.\vec{k}-\vec{j}.\vec{j}+\vec{j}.\vec{k}=0-0-\left\|\vec{j}\right\|^2+0=-1\neq 0$

d'où le repère $(O,\vec{i}-\vec{j},\vec{j}-\vec{k},\vec{k}-\vec{i})$ n'est pas orthogonal

EX4 :

1) $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{0}+\overrightarrow{AC}\wedge(-\overrightarrow{AB})$
$=-(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\wedge(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}+(-\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{AB}$
$=-(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

3) * $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$\Rightarrow BC\times BA\times\sin\hat{B}=AB\times AC\times\sin\hat{A}$

$\Rightarrow BC.\sin\hat{B}=AC.\sin\hat{A}$

$\Rightarrow\dfrac{AC}{\sin\hat{B}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}$ (1)

- $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$\Rightarrow AC\times BC\times\sin\hat{C}=AB\times AC\times\sin\hat{A}$

$\Rightarrow BC.\sin\hat{C}=AB.\sin\hat{A}$

$\Rightarrow\dfrac{AB}{\sin\hat{C}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}$ (2)

$(1)+(2)\Rightarrow\dfrac{AB}{\sin\hat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\hat{B}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}$

EX5 :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$ d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2/3\\1/2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/3\\-4/9\\1/2\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2/3 & -4/9\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1/3\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1/3\\ 2/3 & -4/9\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}5/9\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$

d'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=\frac{5}{9}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$

EX6 :

on sait que : $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k};\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ et $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$ car $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé direct

d'où :

- $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$
- $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$
- $\vec{i}\wedge(-\vec{j})=-(\vec{i}\wedge\vec{j})=-\vec{k}$
- $(2\vec{j})\wedge(-3\vec{k})=-6(\vec{j}\wedge\vec{k})=-6\vec{i}$

EX7 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}.\vec{w}=6+(-4)+(-2)=0$ d'où $\vec{u}\perp\vec{w}$

2) soit $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}1 & b\\1 & c\end{vmatrix}=3\\-\begin{vmatrix}2 & a\\1 & c\end{vmatrix}=-4\\\begin{vmatrix}2 & a\\1 & b\end{vmatrix}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c-b=3\\a-2c=-4\\2b-a=-2\end{cases}$$ pour a=2 on aura : b=0 et c=3

d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ convient

3) soit $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ d'après 2)° $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\-1+\frac{a}{2}\\2+\frac{a}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{u}.\vec{v}=1$

d'où $2a+(-1+\frac{a}{2})+(2+\frac{a}{2})=1\Leftrightarrow 3a=0\Leftrightarrow a=0$ d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

EX8 :

$\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}.\vec{v}=2$; $\vec{w}=2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v}$

* $\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})=2\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{u}.\vec{v}=0-3\vec{u}.\vec{v}=-6$ ($\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$ car $\vec{u}\perp(\vec{u}\wedge\vec{v})$)

* $\vec{v}.\vec{w}=2\vec{v}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{v}.\vec{v}=0-3\|\vec{v}\|^2=-3(4)^2=-48$

* $\|\vec{w}\|^2=(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})^2=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9\|\vec{v}\|^2-12(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{v}=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9(4)^2-0=144+4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2$

or

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\Rightarrow 2=1\times4\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=1\times4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

d'où $\|w\|^2=144+4(2\sqrt{3})^2=192\Rightarrow\|w\|=\sqrt{192}=8.\sqrt{3}$

EX9 :

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$; $\vec{u}\perp\vec{v}$; $\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$

1) * $\vec{v}\perp(\vec{w}\wedge\vec{v})\Rightarrow\vec{v}.(\vec{u}-\vec{w})=0\Rightarrow\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{w}=0\Rightarrow\vec{v}.\vec{w}=0$ (car $\vec{v}.\vec{u}=0$) $\Rightarrow\vec{w}\perp\vec{v}$

* on a: $\vec{u}=\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\Rightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2\Leftrightarrow1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2+2\vec{w}.(\vec{w}\wedge\vec{v})$

$\Leftrightarrow 1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2$ *or* $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}})\right|$ ($\vec{w}\perp\vec{v}\Rightarrow\sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=1$)

d'où $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$ on aura donc : $1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\|^2=2\|\vec{w}\|^2$

$$\Rightarrow\|\vec{w}\|^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) en général, lorsque : $\|\vec{t}\|=\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{t}\perp\vec{k}$ | on a : $(\vec{t},\vec{k},\vec{t}\wedge\vec{k})$:R.o.n direct
et on a aussi : $\vec{k}\wedge(\vec{t}\wedge\vec{k})=\vec{t}$; $(\vec{t}\wedge\vec{k})\wedge\vec{t}=\vec{k}$

on a : $\vec{w}\perp\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$, $\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\left(\sqrt{2}\vec{w},\vec{v},\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})\right)$ est un repère orthonormé direct

$\Rightarrow\vec{v}\wedge\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})=\sqrt{2}\vec{w}\Rightarrow\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{v})=\vec{w}$ et comme : $\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$ $\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge(\vec{u}-\vec{w})\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}-\vec{v}\wedge\vec{w}$

$\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}+\vec{w}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=-\vec{u}\wedge\vec{v}+(\vec{u}-\vec{w})\Rightarrow 2\vec{w}=\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$

EX10 :

on sait que lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\-7\\7\end{pmatrix}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\-7\\7\end{pmatrix}$ convient

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ convient

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2-\sqrt{2}\\3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires , il suffit donc de choisir un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$

soit $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}.\vec{w}=0\Leftrightarrow(1+\sqrt{2})a-b\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})c=0$

pour a=1 et c=1 , on aura b=$\sqrt{2}$ d'où $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ convient

EX11 : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

a) $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{v}\wedge\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\neq\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$: le produit vectoriel n'est pas associative .

EX12 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}=-\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$, d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à chacun des plans (ABC) et (ADE) , d'où ils sont parallèles
or $A\in(ABC)\cap(ADE)$, ils sont donc confondus , par suite les points A,B,C,D et E sont coplanaires

EX13 :

$$d_{(A,(BC))}=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

a) A(1,1,1) ; B(-1,0,1) ; C(0,0,1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $d=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{1}{1}=1$

b) A(-1,2,0) ; B(-1,5,0) ; C(-3,7,-3)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-9\\0\\6\end{pmatrix}$ $d=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{17}}$

c) A(1,-1,2) ; B(1,0,1) ; C(0,1,2)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $d=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

EX 14 :

a) A(0,3,-2) ; M(1-2t,3+2t, -1-t)

$AM=\sqrt{(1-2t)^2+(2t)^2+(1-t)^2}=\sqrt{9t^2-6t+2}$

b) $AM=\sqrt{(3t-1)^2+1}$ AM est minimale pour $t=\dfrac{1}{3}$

ou bien , on pose : $f(t)=\sqrt{9t^2-6t+2}$ $\Rightarrow f'(t)=\dfrac{3.(3t-1)}{\sqrt{9t^2-6t+2}}$

t	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
f'(t)	-	0	+
f(t)	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

c) soit H : le projeté orthogonal de A sur D $H(\frac{1}{3},\frac{11}{3},\frac{-4}{3})$ $(t=\frac{1}{3})$;

EX15 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix};\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$

1. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ $or\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-6\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=-9\neq 0$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires et par suite les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires.

2. $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}.|-9|=\frac{3}{2}\ (u.v)$

3. a)

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ $AC=AD=CD=3\sqrt{2}\Rightarrow ACD\ est\ équilatéral$

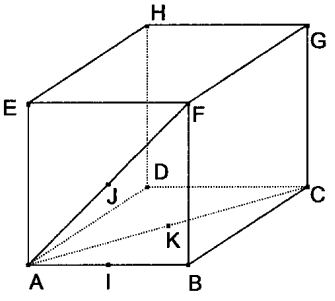
b) Soit @ l'aire du triangle ACD

$$V=\frac{BH.@}{3}\Rightarrow BH=\frac{3.V}{@}\quad or\ on\ a:V=\frac{3}{2}\ et\ @=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=9.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BH=\frac{3.\frac{3}{2}}{9.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

EX 16 : O=A*G=B*H=C*E=D*F

I=A*B ; J=A*F=B*E ; K=A*C=B*D



1) On rapporte l'éspace au R.O.N $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

A(0,0,0) ;B(1,0,0) ;D(0,1,0) ;E(0,0,1) ;G(1,1,1) ;C(1,1,0)

$\Rightarrow I(\frac{1}{2},0,0)$;$O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$;$J(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ et $K(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix};\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix};\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}\Rightarrow \overrightarrow{IO},\overrightarrow{IJ}\ et\ \overrightarrow{IK}\ sont\ coplanaires$$

et par suite les points O,I,J et K sont coplanaires

2)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}\Rightarrow OKIJ\ est\ un\ parallè\log ramme\\ IJ=IK=\frac{1}{2}\\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}=0\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{IK}\end{array}\right\}\Rightarrow OKIJ\ est\ un\ carré$$

3)

$$V=\frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IB}\right| \quad or\ \overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.\left|-\frac{1}{8}\right|=\frac{1}{24}\ (u.v)$$

EX 17:

1) * $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BJ}$ d'où ABJI est un parallélogramme (1)

* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{LH}$ d'où ALHI est un parallélogramme (2)

* $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$ d'où ABKL est un parallélogramme (3)

(1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ ABKLIJGH est un parallélepipède

2) a/ A(0,0,0) ; B(1,0,0) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

A(0,0,0) ; D(0,1,0) $\Rightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ d'où $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}$

b) $V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\right).\overrightarrow{AL}\right|$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&\frac{1}{3}\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{vmatrix}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}).\overrightarrow{AL}=0+0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

d'où $V=\frac{1}{3}$ *unité de volume*

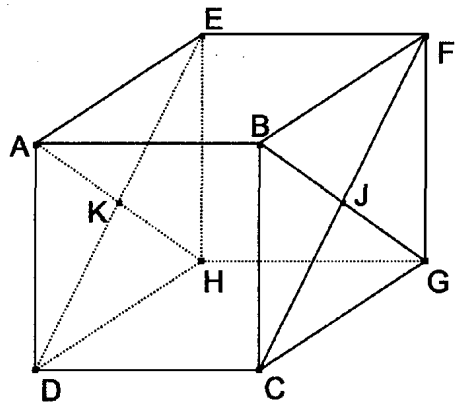
EX 18 :

K=A*H =D*E

J=B*G=C*F

1) D(0,0,0) ; C(1,0,0) ; H(0,1,0) ;A(0,0,1)

B(1,0,1) ; G(1,1,0) ;E(0,1,1) ;F(1,1,1)



$$*\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FE}\wedge\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FE}\wedge\overrightarrow{FG}=-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{FB}$$

$$*\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{HD}$$

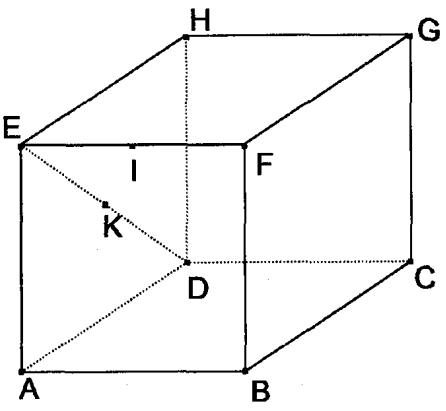
$$*\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DH}$$

2) $$*\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}$$

3) $J(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$*\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DK}$$

Ex 19 :



$I = E * F \quad , K = A * H = D * E$

1) a)

$A(0,0,0)\ ; B(1,0,0)\ ; G(1,1,1); K(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ ; I(\frac{1}{2},0,1)$

$$\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix};\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{BK}$$

b) $aire(IGA)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BK}\right\|=\frac{\sqrt{6}}{4}\ (u.a)$

2)

$$\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right).\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{6}\left|-\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{6}(u.v)$$